

2024成人高考考前冲刺—高等数学

专科起点升本科



第一部分 考试题型分析

考试采用**闭卷笔试**的形式，全卷满分150分，考试时间150分钟。具体题型分值如下：

部分	题型	题号	题量	分值
一	选择题	1~10	10	40
二	填空题	11~20	10	40
三	解答题	21~28	8	70
总计			28	150

第一部分 考试题型分析

其中高数一和高数二共同解答题具体的考试知识点如下：

- (1) 极限——洛必达法则，两个重要极限
- (2) 导数或者偏导数——复合函数
- (3) 不定积分——凑微分或者分部积分法
- (4) 定积分——凑微分或者分部积分法
- (5) 曲面面积和旋转体体积——背例题
- (6) 导数的应用——单调性、凹凸性、极值等——背例题
- (7) 偏导数的应用——复合函数的偏导数、极值或者条件极值——背

例题

2022年真题

21. (本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x}, & x < 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$, 在 $x=0$ 处连续, 求 a .

22. (本题满分 8 分)

设 $y = \frac{x}{1-x}$, 求 y' .

23. (本题满分 8 分)

求 $\int \frac{1}{(1+x)(x+2)} dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

25. (本题满分 8 分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为:

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

(1) 求 X 的分布函数 $F(x)$;

(2) 求 $E(X)$.

26. (本题满分 10 分)

设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $2y^2 + 2xz + z^2 = 1$ 所确定隐函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

27. (本题满分 10 分)

设 D 曲线 $y = x^2, y = 0, x = 2$ 所围成的图形.

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

28. (本题满分 10 分)

证明: 当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1$.

2021年真题

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

22. (本题满分 8 分)

求函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 的单调区间和极值.

23. (本题满分 8 分)

$\int (2 \arcsin x + 1) dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$.

25. (本题满分 8 分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	a	$3a$	$4a$	$2a$

其中 a 为常数。

(1) 求 a ;

(2) 求 $E(X)$.

26. (本题满分 10 分)

设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = x^2 + y$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{\partial y}{\partial x}$.

27. (本题满分 10 分)

设 D 为由直线 $x + y - 4 = 0$ 与曲线 $y = \frac{3}{x}$ 所围成的闭区域。

(1) 求 D 的面积

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

28. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ 下的最大值和最小值。

2023年真题

21.(本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

22.(本题满分 8 分)

设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 求 dy .

23.(本题满分 8 分)

计算 $\int x^2 \cos x dx$.

24.(本题满分 8 分)

计算 $\int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx$.

25.(本题满分 8 分)

盒中有 5 个球, 其中 3 个白球, 2 个黑球, 从中随机一次抽取 3 个球, 用 X 表示抽取到的白球的数.

(1) 求随机变量 X 的概率分布;

(2) 求 X 的数学期望 $E(X)$.

26.(本题满分 10 分)

要做一个容积 V 立方米的密闭圆柱形容器, 两底面材料的价格为每平方米 a 元, 侧面材料的价格为每平方米 b 元, 问圆柱形容器的底面半径与高的比等于多少时, 造价最低?

27.(本题满分 10 分)

证明: 当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

28.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$, n 为大于 1 的整数, 求在条件 $x + y = c$ 下 $f(x, y)$ 的最小值, 其中 $x > 0, y > 0, c$ 为正常数.

重点知识

21、求极限

22、求导数

23、不定积分

24、定积分

25、概率题

26、27、28

面积、体积、应用题

偏导数, 隐函数求导, 证明题

极值问题 (无条件、条件下)

二、极限和连续

(一) 极限的定义

(1) 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

如果当 x 无限得趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限地趋于一个确定的常数 A ,则称 $x \rightarrow x_0$ 时 ,函数 $f(x)$ 的极限为 A ,

记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

二、极限和连续

(三) 无穷小量和等价无穷小

定义：

如果自变量 x 在某个变化过程中（ $x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$ ），
函数 $f(x)$ 的极限值为零，则称在该变化过程中， $f(x)$ 为
无穷小量，记作 $\lim f(x) = 0$ 。

二、极限和连续

无穷小量的比较

- (1) 如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称 α 是比 β 较高阶的无穷小量。
- (2) 如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = C \neq 0$, 则称 α 是与 β 同阶的无穷小量。
- (3) 如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, 则称 α 与 β 是等价无穷小量。
- (4) 如果 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称 α 是比 β 低阶的无穷小量。

考点：常用的等价无穷小量代换：

当 $x \rightarrow 0$ 时 , $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$,

$\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ 。

二、极限和连续

【习题】

当 $x \rightarrow 0$ 时，下列无穷小量与 x^2 等价的是 ()

A. $x \sin^2 x$

B. $x \cos^2 x$

C. $x \sin x$

D. $x \cos x$

同学们注意此题中用到的答题技巧。

答案：C

分析：4 个选项中均有 x ，跟题目中的 x 一起消掉

后，很明显看到 x 和 $\sin x$ 等价。

二、极限和连续

(四) 代入法求极限★

$$\text{当 } Q(x) \neq 0, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}。$$

代入法主要是利用了“初等函数在某点的极限，等于该点的函数值。”

因此在考试的时候，会有部分简单的题目，可以直接用代入法求的极限的答案。

二、极限和连续

【习题】

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 2} = (\quad)。$$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

答案：C

二、极限和连续

【习题】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = (\quad)。$$

A. e

B. 2

C. 1

D. 0

答案: D

二、极限和连续

(五) 两个重要极限★

重要极限 I : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。

它可以用下面更直观的结构式表示 : $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$ 。

重要极限 II : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 。

或者表示为 : $\lim_{\square \rightarrow x_0} (1 + \text{无穷小量})^{\frac{1}{\text{无穷小量}}} = e$ 。

二、极限和连续

★根据以上公式总结出两个重要极限的解题规律如下：

重要极限 I $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$

重要极限 II $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \alpha)^{\beta} = e^{\alpha\beta}$

二、极限和连续

【习题】

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = 2$, 则 $a = (\quad)$ 。

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

答案:D

分析： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin ax}{ax} = a = 2$ 。

二、极限和连续

【习题】

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}}$ 。

答案： $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+x)^{\frac{1}{x}}]^2 = e^2$ 。

二、极限和连续

【习题】

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

答案： $e^{-3x \cdot \frac{1}{x}} = e^{-3}。$

二、极限和连续

(六) 洛必达(L' Hospital)法则★

“ $\frac{0}{0}$ ”型和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型不定式, 存在有 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (或 ∞)。

通过求导的方式进行极限的计算

二、极限和连续

【习题】

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2}$ 。

分析：先用代入法，发现是 $\frac{0}{0}$ 型的，然后用洛必达法则求解。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} \times 2 - 2e^x + 0}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2e^{2x} - e^x) = 1。$$

二、极限和连续

【习题】

计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x}$ 。

分析：带入分母为 0，用洛必达法则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} = e$ 。

三、一元函数微分学

(一) 导数的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx (点 $x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内) 时, 相应地函数 y 取得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 函数的增量 Δy 与自变量 Δx 的增量之比的极限存在, 则称该极限为函数在点 x_0 处的导数。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

注意两个符号 Δx 和 x_0 在题目中可能换成其他的符号表示。

三、一元函数微分学

【习题】

已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=3$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = (\quad)$ 。

A. 0

B. 1

C. 3

D. 6

答案: C

三、一元函数微分学

【习题】

设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x)-f(1)}{x} = (\quad)$ 。

A. -2

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

答案: A

三、一元函数微分学

(二) 导数的几何意义★

导数的几何意义，简单点说，就是在某点的导数，就是某点切线的斜率。

考试的时候，喜欢考切线方程，所以点斜式直线方程：

$$y - y_0 = K(x - x_0)$$

三、一元函数微分学

【习题】

曲线 $y = e^x + x^2$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为_____。

答案：1

三、一元函数微分学

【习题】

曲线 $y = x^2 + 3x$ 在点 $(1, 3)$ 处的法线方程 ()

A $5x + y - 8 = 0$

B $5x - y - 2 = 0$

C $x + 5y - 16 = 0$

D $x - 5y + 14 = 0$

答案：C

分析：题目中出现了法线，法线是跟直线垂直的，所以法线的斜率跟直线的切线斜率相乘为 -1 。

三、一元函数微分学

(三) 导数的计算★ ★ ★

1、基本初等函数的导数公式

(1) $(C)' = 0$ (C 为常数) ;

(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n 为任意常数) ;

(3) $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$) 特殊情况 $(e^x)' = e^x$;

(4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$ ($x > 0, a > 0, a \neq 1$) , $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

三、一元函数微分学

(三) 导数的计算★★★

$$(5) (\sin x)' = \cos x ;$$

$$(6) (\cos x)' = -\sin x ;$$

$$(7) (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} ;$$

$$(8) (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} ;$$

三、一元函数微分学

(三) 导数的计算★ ★ ★

$$(9) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) ;$$

$$(10) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) ;$$

$$(11) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} ; \star$$

$$(12) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \circ$$

三、一元函数微分学

(三) 导数的计算★ ★ ★

2、导数的四则运算公式

$$(1) [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x) ;$$

$$(2) [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) ;$$

$$(3) [ku]' = ku' \quad (k \text{ 为常数});$$

$$(4) \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} .$$

三、一元函数微分学

3、复合函数求导公式

设 $y = f(u)$, $u = \phi(x)$, 且 $f(u)$ 及 $\phi(x)$ 都可导 , 则复合函数 $y = f[\phi(x)]$ 的

导数为 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \phi'(x)$ 。

4、二阶导数和高阶导数。

三、一元函数微分学

【习题】

设函数 $y = \frac{x+1}{\sin x}$, 求 y' 。

答案：
$$y' = \frac{(x+1)' \sin x - (x+1)(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{\sin x - (x+1)\cos x}{\sin^2 x}$$

三、一元函数微分学

【习题】

设函数 $y = \cos(x^2 + 1)$, 求 y' 。

分析：复合函数求导

$$\begin{aligned} y' &= [\cos(x^2 + 1)]' \\ &= -\sin(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)' \\ &= -2x \sin(x^2 + 1) \end{aligned}$$

三、一元函数微分学

(五) 微分公式

$dy = f'(x)dx$, 求微分就是求导数。

三、一元函数微分学

【习题】

设函数 $y = \ln(x^2 + 1)$, 求 dy 。

答案： $y' = \frac{1}{x^2 + 1}(x^2 + 1)' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

$$dy = \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

四、多元函数微分学

(一) 偏导数的计算★

对多元函数中的，某个变量求偏导数，就是把其他的变量看做常数。

四、多元函数微分学

【习题】

设函数 $z = x^3 + y^3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____。

- A. $3x^2$ B. $3x^2 + 3y^2$ C. $\frac{y^4}{4}$ D. $3y^2$

答案: D

四、多元函数微分学

【习题】

若二元函数 $z = x^2 y^2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (\quad)$

分析： $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy$$

四、多元函数微分学

【习题】

设函数 $z = x^3y + xy^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

答案： $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + y^3$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 3y^2$$

四、多元函数微分学

(二) 复合函数的偏导数——利用函数结构图

如果 $u = \phi(x, y)$ 、 $v = \psi(x, y)$ 在点 (x, y) 处存在连续的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, 且在对应于 (x, y) 的点 (u, v) 处, 函数 $z = f(u, v)$ 存在连续的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, 则复合函数 $z = f[\phi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 处存在对 x 及 y 的连续偏导数, 且 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$ 。

四、多元函数微分学

【习题】

已知 $z = \frac{u}{v}$, 其中 $u = x^2 y$, $v = x + y^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, dz

答案： $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{v} 2xy + \frac{-u}{v^2} = \frac{2xy}{x + y^2} - \frac{x^2 y}{(x + y^2)^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{v} x^2 + \frac{-u}{v^2} 2y = \frac{x^2}{x + y^2} - \frac{2x^2 y^2}{(x + y^2)^2}$$

$$dz = \frac{2xy}{x + y^2} - \frac{x^2 y}{(x + y^2)^2} dx + \frac{x^2}{x + y^2} - \frac{2x^2 y^2}{(x + y^2)^2} dy$$

四、多元函数微分学

(三) 隐函数的导数和偏导数

1、隐函数的导数

对于方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$,可以由下列公式求出 y 对 x 的导数 y' :

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} .$$

四、多元函数微分学

(三) 隐函数问题

2、隐函数的偏导数

对于由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的隐函数 $z = f(x, y)$, 可用下列公

式求偏导数 :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \circ$$

四、多元函数微分学

【习题】

设函数 $z = z(x, y)$ 由 $\sin(x + y) + e^z = 0$ 确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。

答案：设 $F(x, y, z) = \sin(x + y) + e^z$ ，

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos(x + y), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\cos(x + y)}{e^z}$$

四、多元函数微分学

(五) 全微分公式

$$dz = df(x, y) = A\Delta x + B\Delta y = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \bullet$$

四、多元函数微分学

【习题】

设函数 $z = x^2 e^y$, 则全微分 $dz =$ _____。

答案： $2xe^y dx + x^2 e^y dy$

五、一元函数积分学

(一) 不定积分的计算

1、定义

不定积分是求导的逆运算，最后的结果是函数+C的表达形式。

公式可以用求导公式来记忆。

五、一元函数积分学

3、基本积分公式（要求熟练记忆）

$$(1) \int 0 dx = C。$$

$$(2) \int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (a \neq -1)。$$

$$(3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C。$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1)。$$

五、一元函数积分学

3、基本积分公式（要求熟练记忆）

$$(5) \int e^x dx = e^x + C。$$

$$(6) \int \sin x dx = -\cos x + C。$$

$$(7) \int \cos x dx = \sin x + C。$$

$$(8) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C。$$

五、一元函数积分学

3、基本积分公式（要求熟练记忆）

$$(9) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C。$$

$$(10) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C。$$

$$(11) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C。$$

五、一元函数积分学

3、第一类换元积分法

第一类换元积分法是复合函数求导的逆运算，在被积函数中一定存在复合函数。

不定微分 $\int g(x)dx$ ，将被积表达式 $g(x)dx$ 凑成，

$$g(x)dx = f[\phi(x)]\phi'(x)dx = f\phi(x)d\phi(x)$$

五、一元函数积分学

4、分部积分法

$\int u dv = uv - \int v dv$, 是 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ 的逆运算, 被积函数都是简单函数。

五、一元函数积分学

【习题】

$$\int (x - \sin x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- A. $x^2 + \cos x + C$ B. $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$ C. $x^2 - \sin x + C$ D. $\frac{x^2}{2} - \sin x + C$

答案：B

分析：不定积分的公式。

五、一元函数积分学

【习题】

计算 $\int \frac{x}{4+x^2} dx$ 。

答案： 第一类换元积分法

$$\int \frac{x}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{4+x^2} d(4+x^2) = \frac{1}{2} \ln(4+x^2) + C$$

五、一元函数积分学

【习题】

计算 $\int x \cos x dx$ 。

答案：分部积分法

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= \int x d(\sin x) \\ &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

计算 $\int x \cos x^2 dx$ 。

答案：第一类换元积分法

$$\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 d(x^2) = \frac{1}{2} \sin x^2 + C$$

五、一元函数积分学

【习题】

计算 $\int \frac{x^3}{x-1} dx$ 。

答案：公式法

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x-1} dx &= \int \frac{x^3 - 1 + 1}{x-1} dx = \int \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C\end{aligned}$$

高等数学一、二 计算题 模板



计算题-1 曲面面积和旋转体体积

(二) 定积分的应用★

1、(牛顿—莱布尼茨公式)

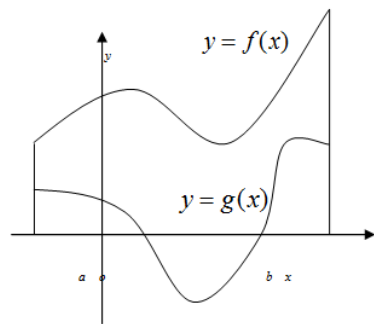
如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的任意一个原函数 ,则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) 。$$

四、一元函数积分学

(二) 定积分的应用★

2、计算平面图形的面积



如果某平面图形是由两条连续曲线 $y_1 = g(x)$, $y_2 = f(x)$ 及两条直线 $x_1 = a$ 和 $x_2 = b$ 所围成的 (其中 y_1 是下面的曲线 , y_2 是上面的曲线), 则其面积可由下式求出 :

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

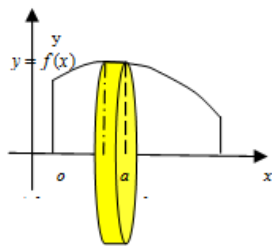
计算题-1 曲面面积和旋转体体积

(二) 定积分的应用★

2、计算旋转体的体积

设某立体是由连续曲线 $y = f(x) (f(x) \geq 0)$ 和直线 $x = a$, $x = b (a < b)$ 及 x 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体，如图所示。则该旋转体的体积 V 可由下式求出：

$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



计算题-1 曲面面积和旋转体体积

(1227) 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2x$ 。

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的平面图形的面积 S ;

(2) 求 (1) 中的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

V 。

计算题-1 曲面面积和旋转体体积

(1) 由 $\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = 0 \end{cases}$ 得交点坐标为 $(0,0), (2,0)$;

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left(-\frac{x^2}{3} + x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3} \circ$$

$$\begin{aligned} (2) \quad V &= \int_0^2 \pi (f(x))^2 dx = \int_0^2 \pi (-x^2 + 2x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} x^5 - x^4 + \frac{4}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{15}{16} \pi \circ \end{aligned}$$

计算题-2 导数的应用

一阶导数：

$f'(x) = 0$ ，是驻点，可能是极值点。

$f'(x) > 0$ 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内严格单调增加。

$f'(x) < 0$ 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内严格单调减少。

计算题-2 导数的应用

二阶导数：

$f''(x) = 0$, 拐点。

$f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内是凹的。

$f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的。

计算题-2 导数的应用

★ (1126) 求函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ 的单调区间、极值和曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间。

答案：函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ；

$$y' = x^2 - 4, \quad y'' = 2x ;$$

$$y' = 0 \text{ 得 } x = \pm 2 ;$$

$$y'' = 0 \text{ 得 } x = 0 ;$$

计算题-2 导数的应用

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	0	—		—	0	+
y''	—		—	0	+		+
y		$y(-2) = \frac{19}{3}$ 为极大值				$y(2) = \frac{13}{3}$ 为极小值	

计算题-2 导数的应用

函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$;

函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-2, 2)$;

曲线的凸区间为 $(-\infty, 0)$;

曲线的凹区间为 $(0, +\infty)$

计算题-3 二元函数的极值

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有一阶和二阶连续偏导数，且 $f'_x(x_0, y_0) = 0$ ， $f'_y(x_0, y_0) = 0$ 又设 $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$ ， $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$ ， $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$ ，则：

(1) 当 $B^2 - AC < 0$ 时，函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极值，且当 $A < 0$ 时有极大值，当 $A > 0$ 时有极小值。

(2) 当 $B^2 - AC > 0$ 时，函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处无极值。

(3) 当 $B^2 - AC = 0$ 时，函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处是否有极值不能确定，要用其他方法另作讨论。

计算题-3 二元函数的极值

【习题】

求二元函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y$ 的极值。

答案：
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x \\ f'_y(x, y) = 2y + 2 \end{cases}$$

令
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{得驻点 } (0, -1)$$

因为 $f'_{xx}(x, y) = 2, f'_{xy}(x, y) = 0, f'_{yy}(x, y) = 2$;

所以 $A = f'_{xx}(0, -1) = 2, B = f'_{xy}(0, -1) = 0, C = f'_{yy}(0, -1) = 2$;

由于 $A > 0$ 且 $AC - B^2 > 0$, 故 $f(x, y)$ 在点 $(0, -1)$ 处取得极小值 ;

极小值为 $f(0, -1) = -1$ 。

计算题-4 概论和微分方程

高数二：概率题

高数一：微分方程

参考2021和2022年的真题即可

高等数学答题技巧

1、数学对于很多同学来说比较的难，数学的核心是微积分，所以微积分公式很重要，同学们可以在进考场之前一定要好好的，认真的把微积分公式再记忆一遍，然后开始考试后，把公式默写在草稿纸上，这样不容易记混淆了。

2、养成好的答题习惯，一定要写“解：”然后解答题目的时候，根据已知条件一步步的推导，书写要工整，就算是最后没有算出答案，过程也是会有分的。

3、选择题参考英语的选择题技巧，填空题可不会的优先写1，其次写0。

**祝同学们
考试顺利，加油！！**

